Exercice :1.Sous espace stable par l'opérateur de dérivation

Déterminer les sous espace vectoriels stables par l'endomorphisme D de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Solution :1

Le sous espace nul et l'espace $\mathbb{K}[X]$ sont stables par D , cherchons les sous espaces stables non triviaux . Soit F un sous espace stable par l'opérateur de dérivation , on va distinguer deux cas :

① Si F est de dimension finie non nul r.
Soient $(P_1,\dots,P_r)$ une base de F et $m=\max(\deg P_1,\dots,\deg P_r)$ .Il est clair que $F\subset\mathbb{K}_m[X]$ .Soit $i_0\in[\![1,r]\!]$ tel que $\deg P_{i_0}=m$, la famille $(P_{i_0},P'_{i_0},\dots,P_{i_0}^{(m)})$ est une famille de degré échelonnée donc elle est libre et par suite dim $\left(\mathcal{V}ect(P_{i_0},P'_{i_0},\dots,P_{i_0}^{(m)}\right)=m+1$, or $\mathcal{V}ect(P_{i_0},P'_{i_0},\dots,P_{i_0}^{(m)})\subset\mathbb{K}_m[X]$, alors $\mathcal{V}ect(P_{i_0},P'_{i_0},\dots,P_{i_0}^{(m)})=\mathbb{K}_m[X]$. comme F est stable par D , alors $\mathcal{V}ect(P_{i_0},P'_{i_0},\dots,P_{i_0}^{n})\subset F$ c'est à dire $\mathbb{K}_m[X]\subset F$ donc $F=\mathbb{K}_m[X]$

② Si F est de dimension infinie.Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $F\not\subset\mathbb{K}_n[X]$ ce qu'est équivalent de dire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists P\in F$, $m=\deg P>n$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ *et* $P\in F$ $m=\deg P>n$. La famille $(P,P',\dots,P^{(m)})$ est une famille libre de $\mathbb{K}_m[X]$, comme famille de degré échelonnée d'éléments de $\mathbb{K}_m[X]$, de cardinal est égale à $m+1$, alors $\mathbb{K}_m[X]=\mathcal{V}ect(P,P',\dots,P^{(n)})$ et par stabilité de F par D , on a $\mathcal{V}ect(P,P',\dots,P^{(n)})\subset F$, c'est à dire que $\mathbb{K}_m[X]\subset F$ et comme $\mathbb{K}_n[X]\subset\mathbb{K}_m[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]\subset F$ et ceci pour tout entier naturel n donc $F=\mathbb{K}[X]$

Exercice :2.L'ordre et le rang d'une matrice

Soit n un entier non nul et A une matrice carrée d'ordre n a coefficients réels.

① On suppose que $A^2+A+I_n=0$ .Montrer que n est pair

② On suppose que $A^3+A^2+A=0$ .Montrer que le rang de A est pair

Solution :2

① Le polynôme X^2+X+1 est annulateur de A donc les valeurs propres de A sont dans $\{j,j^2\}$ et par suite si n est impaire , alors χ_A admet au moins une racine réelle c'est à dire que A admet une valeur propre réelle ce qu'est absurde donc n est paire

② On a $A(A^2+A+I_n)=0_n$ donc d'après le lemme des noyaux
$$\ker u_A\oplus\ker(u_A^2+u_A+id_{\mathbb{K}^n})=\mathbb{K}^n$$
Ou u_A désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A.Le sous espace $F=\ker(u_A^2+u_A+id_{\mathbb{K}^n})$ est stable par u_A , notons v l'endomorphisme induit par u_A sur F .Si F est de dimension impaire , alors χ_v est de degré impaire , donc admet au moins une racine réelle c'est à dire que v aura au moins une valeur propre réelle λ , et comme le polynôme X^2+X+1 est un polynôme annulateur de v , alors λ est une racine réelle de ce polynôme ce qui est absurde , donc la dimension de F est paire .Or d'après le théorème du rang on a $rg(u_A)=\dim F$, d'ou le résultat

Exercice :3.

Soit A une matrice inversible d'orde n à coefficient dans $\mathbb{C}$.Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A^{-1}

Solution :3

Soit λ un scalaire non nul , on a :
$$\chi_{A^{-1}}(\lambda)=\det(A^{-1}-\lambda.I_n)=\det\left(A^{-1}(I_n-\lambda.A)\right)$$
$$=\frac{(-\lambda)^n}{\det A}\det\left(A-\frac{1}{\lambda}.I_n\right)=\frac{(-\lambda)^n}{\det A}\chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

__Autrement__

On montre facilement que $\mathcal{S}p(A^{-1})=\left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda\in\mathcal{S}p(A)\right\}$, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, alors on a pour tout $x\in\mathbb{C}^*$
$$\chi_{A^{-1}}(x)=(-1)^n\prod_{k=1}^n\left(x-\frac{1}{\lambda_k}\right)=\frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n\lambda_k}x^n\prod_{k=1}^n\left(\lambda_k-\frac{1}{x}\right)=\frac{(-x)^n}{\det A}\chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice :4.

Soit A , B et P trois matrices carrés non nulles à coefficients dans $\mathbb{C}$

① Montrer que $\chi_A(B)\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})\Leftrightarrow\mathcal{S}p(A)\cap\mathcal{S}p(B)=\phi$

② Montrer que si $AP=PB$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune

Solution :4

① (i) : $(\Rightarrow)$.Supposons que $\chi_A(B)\in\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, donc $\chi_A=(-1)^n\prod_{k=1}^n(X-\lambda_k)$ et par suite $\chi_A(B)=(B-\lambda_1.I_n)\dots.(B-\lambda_n.I_n)$,l 'hypothèse assure que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $B-\lambda_i.I_n$ est inversible , c'est à dire que $\forall i[\![1,n]\!]$, $\lambda_i\notin\mathcal{S}p(B)$, ce qui veut dire que $\mathcal{S}p(A)\cap\mathcal{S}p(B)=\phi$
(ii) : $(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathcal{S}p(A)\cap\mathcal{S}p(B)=\phi$, alors $\forall\lambda\in\mathcal{S}p(A)$, $\lambda\notin\mathcal{S}p(B)$ c'est à dire que $B-\lambda.I_n\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.Et comme $\chi_A(B)=(B-\lambda_1.I_n)\dots.(B-\lambda_n.I_n)$, alors $\chi_A(B)$ est inversible comme produit de matrice inversibles

② Supposons que $AP=PB$, alors par une récurrence facile on a :
$$\forall k\in\mathbb{N}\ ,\ A^kP=PB^k$$
Et par linéarité on a $\forall Q\in\mathbb{K}[X]$, $Q(A)P=PQ(B)$, en particulier pour $Q=\chi_A$, on a $0_n=P\chi_A(B)$, ce qui entraine alors que $0_n=P.\chi_A(B)$ et par suite $\chi_A(B)$ est non inversible et d'après la question précédente $\mathcal{S}p(A)\cap\mathcal{S}p(B)\neq\phi$, d'ou le résultat

Exercice :5

Soit A et B deux matrices carrées à coefficients complexes .Montrer les propositions suivantes sont équivalentes :

① $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX - XB = C$

② $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \Rightarrow X = 0$

③ $\chi_B(A)$ est inversible

④ A et B n'ont pas de valeur propre commune

Solution :5

① $(1 \Rightarrow 2)$ En prenant $C = 0_n$, alors d'après l'hypothèse il existe une unique matrice X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = 0$ et comme la matrice nulle est aussi solution , alors $X = 0_n$

② $(2 \Rightarrow 1)$ Notre hypothèse nous permet de dire que l'endomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X \longmapsto AX - XB \end{cases}$$

est injective et comme on est en dimension finie , alors c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'ou le résultat

③ $(3 \Leftrightarrow 4)$ est immédiate d'après l'exercice précéent

④ Pour $(2 \Rightarrow 3)$, on montre sa contraposée supposons , alors que $\chi_A(B)$ est non inversible , donc A et B admettent une valeur propre commune λ , soit alors U un vecteur propre de A associé à λ et V un vecteur propre de ${}^tB$ associé à λ et posons $X = U^tV$, il est clair que X est non nul car c'est une matrice de rang 1 et on a $AX = AU^tV = \lambda.X$ et $XB = U^tVB = \lambda.X$ ce qui prouve que la négation de 2 est vrai

⑤ $(3 \Rightarrow 2)$.Supposons que $\chi_A(B)$ est inversible et soit X une matrice d'ordre n vérifiant $AX = XB$, alors par une récurrence facile on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kX = XB^k$ et par linéairité on a $\chi_A(A)X = X\chi_A(B) = 0_n$, alors l'inversibilité de $\chi_A(B)$ entraine que $X = 0_n$ d' ou le résultat

Exercice :6

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

① A est nilpotente

② A est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous nuls

③ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $tr(A^k) = 0$

Solution :6

Remarque :Si T est une matrice triangulaire supérieure (inférieure) de coefficients diagonaux $t_1, \dots, t_n$, alors pour tout entier naturel non nul k la matrice T^k est triangulaire supérieure (inférieure) de coefficients diagonaux $t_1^k, \dots, t_n^k$

① $(1 \Rightarrow 2)$ La matrice A est nilpotente donc elle admet 0 comme seule valeur propres et par suite A est trigonalisable donc semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres donc nuls

② $(2 \Rightarrow 3)$ Soit P une matrice inversible et T une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont nuls tels que $A = P^{-1}TP$, alors par une récurrence facile on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = P^{-1}T^kP$, et par suite $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $tr(A^k) = 0$

③ $(3 \Rightarrow 1)$.Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $tr(A^k) = 0$, montrons que A est nilpotente c'est à dire que son spectre est réduit à $\{0\}$ .Raisonnons par l'absudre et supposons que A admet au moins une valeur propre non nulle , soit alors λ_1 , $\dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A de multiplicité respectivement m_{λ_1} , $\dots$, m_{λ_r}, comme on travaille dans $\mathbb{C}$, alors on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $tr(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i}\lambda_i^k$.On va s'intéresser au r égalités suivantes

$$\forall k \in [\![1, r]\!] , \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i}\lambda_i^k = 0$$

Ce qui se traduit matriciellement par :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} m_{\lambda_1} \\ m_{\lambda_2} \\ \vdots \\ m_{\lambda_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci d'une part d'autre part on a

$$det A = \left(\prod_{k=1}^{r} \lambda_k\right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{r} \lambda_k\right) . \left(\prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)\right) \neq 0$$

Ce qui entraine que $\begin{pmatrix} m_{\lambda_1} \\ m_{\lambda_2} \\ \vdots \\ m_{\lambda_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui contredit la définition de la multiplicité d'une valeur propre, on conclut alors que A est nilpotent

Exercice :7.Sous espaces caractéristiques

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E.Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de multiplicité m_λ , on pose $F_\lambda = \ker (u - \lambda.Id_E)^{m_\lambda}$ appelé sous espace caractéristique associé à λ Montrer que pour toute valeur propre λ de u le sous espace caractéristique associé à λ est de dimension la multiplicité de λ

Solution :7

Soit λ une valeur propre de u de multiplicité m_λ , donc
$$\chi_u = (X-\lambda)^{m_\lambda} Q(X) \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$
D'après le théorème décomposition des noyaux on a $E = F_\lambda \oplus \ker Q(u)$ .Posons $d_\lambda = \dim F_\lambda$, on a F est Stable par u donc
$$\forall x \in F\ ,\ (u_F - \lambda.id_F)^{m_\lambda} = 0_{\mathcal{L}(F)}$$
Ce qui montre que $u_F - \lambda.id_E$ est nilpotent et par suite $\chi_{v-\lambda.id_F} = (-X)^d$ .Or
$$\begin{aligned}\chi_v &= \det(v - X.id_F) = \det((v-\lambda.id_F) - (X-\lambda).id_F)\\ &= \chi_{v-\lambda.id_F}(X-\lambda) = (-1)^d (X-\lambda)^d\end{aligned}$$
Comme F et $\ker Q(u)$ sont stables , alors $\chi_u = \chi_v \chi_w$ avec w l'endomorphisme induit par u sur $\ker Q(u)$ et avec la convention $\chi_w = 1$ si $\ker Q(u) = \{0_E\}$ .Donc $(X-\lambda)^{m_\lambda} Q = (-1)^d (X-\lambda)^d \chi_w$: $(*)$.Si λ est une racine de χ_w alors il existe $x \in \ker Q(u)$, $w(x) = u(x) = \lambda.x$, et comme $Q(u)(x) = Q(\lambda).x = 0$, alors $Q(\lambda) = 0$ ce qui absurde , donc $\chi_w(\lambda) \neq 0$, et par suite
$$\forall p \in \mathbb{N}^*\ ,\ (X-\lambda) \wedge \chi_w = 1$$
Et de l'égalité $(*)$ en déduit que $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ divise $(X-\lambda)^d \chi_w$ et comme $\chi_w \wedge (x-\lambda)^{m_\lambda}$, alors d'après Gaus on a $(X-\lambda)$ divise $(X-\lambda)^d$ ce qui entraine que $m_\lambda \leq d$ .De même de l'égalité $(*)$ on a $(X-\lambda)^d$ divise $(X-\lambda)^{m_\lambda} Q$ et comme $Q \wedge (X-\lambda)^d = 1$, alors $(X-\lambda)^d$ divise $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ ce qui entraine que $d \leq m_\lambda$ et par suite l'égalité

Exercice :8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle , u un endomorphisme de E , λ une valeur propre de u de multiplcité m_λ et p un entier naturel non nul.

① Montrer que la multiplicité de λ en tant que racine de π_u est le plus petit entier naturel vérifiant
$$\ker(u-\lambda.id_E)^p = \ker(u-\lambda.id_E)^{p+1}$$

② En déduire que : $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda \Leftrightarrow \lambda$ est une racine simple de π_u

Solution :8

① .Notons n_λ la multiplicité de λ comme racine de π_u et posons $\pi_u = (X-\lambda)^{n_\lambda} Q$ *avec* $Q(\lambda) \neq 0$ et $P = (X-\lambda)^q.Q$

① Si $q > n_\lambda$, alors π_u divise le polynôme Q d'après le lemme de décomposition des noyaux on a
$$E = \ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda} \oplus \ker Q(u) = \ker(u-\lambda.id_E)^q \oplus \ker Q(u)$$
Ce qui entraine alors que $\dim\ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda} = \dim\ker(u-\lambda.id_E)^q$, or la suite $\left(\ker(u-\lambda.id_E)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante au sens de l'inclusion (Voir les grands classiques d'algèbre linéaire),ce qui nous permet de conclure que $\ker(u-\lambda.id_E)^q = \ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda}$

② Si $q < n_\lambda$, alors le polynôme $P = (X-\lambda)^q.Q$ n'est pas divisible par π_u , donc il n'est pas annulateur de u donc en appliquant toujours le lemme de décomposition des noyaux , on a $\ker P(u) = \ker(u-\lambda.id_E)^q \oplus \ker Q(u)$ et comme $P(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\ker P(u)$ est inclus strictement dans
$E = \ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda} \oplus \ker Q(u)$ en passant au dimensions on a :
$$\dim\ker(u-\lambda.id_E)^q + \dim\ker Q(u) < \dim\ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda} + \dim\ker Q(u)$$
Ce qui entraine que $\dim\ker(u-\lambda.id_E)^q < \dim\ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda}$ et par suite que $\ker(u-\lambda.id_E)^q$ est inclus strictement dans $\ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda}$.On a alors démontrer que
$$\forall q > n_\lambda\ ,\ \ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda} = \ker(u-\lambda.id_E)^q$$
ET
$$\forall q < n_\lambda\ ,\ \ker(u-\lambda.id_E)^q \neq \ker(u-\lambda.id_E)^{n_\lambda}$$

② $(\Rightarrow)$. Si $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$, alors d'après l'exercice précédent on a $\dim\ker(u-\lambda.id_E) = \dim\ker(u-\lambda.id_E)^{m_\lambda}$ ce qui entraine que le plus petit entier non nul p vérifiant $\ker(u-\lambda.id_E)^p = \ker(u-\lambda.id_E)^{p+1}$ est égale à 1 c'est à dire que la multiplicité de λ en tant que racine de π_u est égale à 1
$(\Leftarrow)$.Si λ est une racine simple de π_u , alors $\ker(u-\lambda.id_E) = \ker(u-\lambda.id_E)^2$ ce qui entraine alors que $\ker(u-\lambda.id_E) = \ker(u-\lambda.id_E)^{m_\lambda}$ et par suite d'après l'exercice précédent on a $\dim\ker(u-\lambda.id_E) = m_\lambda$

Exercice :9.Caractérisation de la multiplicité m_{π_λ} d'une valeur propre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de$E$ et λ une valeur propre de E.

① Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E_\lambda(u) = \ker(u-\lambda Id_E)^2$

(ii) $E_\lambda(u) \oplus \mathcal{I}m(u-\lambda Id_E) = E$

(iii) $E_\lambda(u)$ possède un supplémentaire stable par u

(iv) La dimension de $E_\lambda(u)$ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de u.

(v) λ est une racine simple du polynôme minimale de u

② Montrer que dans ces conditions , $\mathcal{I}m(u-\lambda Id_E)$ est le seul supplémentaire de $E_\lambda(u)$ stable par u

Solution :9

Soit λ une valeur propre de u de multiplicité m_λ , on a alors
$$\chi_u = (X-\lambda)^{m_\lambda} Q\ ,\text{avec}\ ,\ Q(\lambda) \neq 0$$

1 $(i \Rightarrow ii)$.Supposons que $E_\lambda(u) = \ker(u-\lambda.id_E)^2$, alors d'après le théorème du rang il suffit de montrer que $E_\lambda(u) \cap \mathcal{I}m(u-\lambda.id_E)$ $\{0\}$.Soit alors $x \in E_\lambda \cap \mathcal{I}m(u-\lambda.id_E)$, on a
$$(u-\lambda.id_E)(x) = 0 \text{ et } \exists a \in E\ ,\ x = (u-\lambda.id_E)(a)$$
Ce qui entraine que $(u-\lambda.id_E)^2(a) = 0$ c'est à dire que $a \in \ker(u-\lambda.id_E)^2$ et comme $\ker(u-\lambda.id_E)^2 = \ker(u-\lambda.id_E)$, alors $x = (u-\lambda.id_E)(a) = 0$ d'ou le résultat
$(ii \Rightarrow iii)$ Si $E_\lambda(u) \oplus \mathcal{I}m(u-\lambda.id_E) = E$, alors il est clair que $\mathcal{I}m(u-\lambda.id_E)$ est un sous supplémentaire de $E_\lambda(u)$ stable par u

$(iii \Rightarrow iv)$.Soit F un supplémentaire stable par u de $E_\lambda(u)$, notons v (*resp* w) l'endomorphisme induit sur $E_\lambda(u)$ (*resp* F), alors on a $\chi_u = \chi_v\chi_w$, or $v = \lambda.id_{E_\lambda}$, alors $\chi_u = (\lambda - X)^{\dim E_\lambda}.\chi_w$ .En raisonnant de la même façon que l'exercice précédent , on montre que $\chi_w(\lambda) \neq 0$ et enfin de l'égalité

$$(X-\lambda)^{m_\lambda}Q = \chi_w(\lambda - X)^{\dim E_\lambda(u)}$$

Et

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \ , \ Q \wedge (X-\lambda)^p = \chi_w \wedge (X-\lambda)^p = 1$$

On en déduit que $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ divise $(X-\lambda)^{\dim E_\lambda}$ et $(X-\lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$, divise $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ ce qui entraine alors que $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$

Pour $(iv \Rightarrow v)$ et $v \Rightarrow i$ voir l'exercice précédent

2. On suppose que $E_\lambda(u) \oplus \mathcal{I}m(u - \lambda.id_E) = E$ .Soit F un sous espace supplémentaire stable par u de $E_\lambda(u)$.Montrons que $F = \mathcal{I}m(u - \lambda.id_E)$,notons w l'endomorphisme induit par u sur F , w' l'endomorphisme induit par u sur $\mathcal{I}mu$ et v l'endomorphisme induit sur $E_\lambda(u)$ par u.On a $\chi_u = \chi_v\chi_w = \chi_v.\chi_{w'}$ ce qui entraine que $\chi_w = \chi_{w'}$ donc $\chi_{w'}(w) = 0_{\mathcal{L}()}$

Exercice :10

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace E de dimension finie est dit semi simple si tout sous espace stable par u admet un supplémentaire stable par u.Montrer que u est semi simple si, et seulement si il est diagonalisable

Solution :10

① Supposons que u est diagonalisable , soit B une base de diagonalisation de u et F un sous espace stable par u .Si B_1 une base de F , d'après le théorème de la base incomplète ,il existe une sous famille B_2 de B telle que (B_1, B_2) est un e base de E.Le sous espace $G = \mathcal{V}ect(B_2)$ est un sous espace de E stable par u

② Supposons que tout sous espace de E stable par u possède un supplémentaire stable par u .Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ le spectre de u , si on pose $F = \oplus_{k=1}^r E_\lambda(u)$, alors il est clair que F est non réduit au singleton $\{0\}$, soit G un supplémentaire stable par u de F dans E.Si $G \neq \{0_E\}$, alors l'endomorphisme u_G induit sur G par u admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$, donc un vecteur propre associé à cette valeur propre est alors un élément non nul de F et de G ce qui absurde , donc $G = \{0\}$ et par suite $\oplus_{k=1}^r E_\lambda(u) = E$

Exercice :11

Montrer que le polynôme minimal d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ espace E de dimension fini non nulle admet un nombre fini de diviseur unitaire

Solution :11

On pose $\pi_u = \prod_{k=1}^r P_k^{\alpha_k}$ avec $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.Remarauons que si D est un diviseur unitaire de π , alors $D = \prod_{k=1}^r P_k^{\alpha'_k}$ avec $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha'_k \in [\![0, \alpha_k]\!]$.On verfie aisement en utilisant l'unicité de la décopomsition en facteurs irrédictubles que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{D}_{\pi_u} \to \prod_{k=1}^r [\![0, \alpha_k]\!] \\ D \longmapsto (\alpha'_1, \dots, \alpha'_r) \end{cases}$$

est une bijection et par suite $Card\,(\mathcal{D}_{\pi_u}) = \prod_{k=1}^r (1 + \alpha_k)$ Avec $\mathcal{D}_{\pi_u}$ désigne l'ensemble des diviseurs unitaire de π_u

Exercice :12

Soit E un espace de dimension finie non nulle n , u un endomorphimse de E et x un vecteur de E,

① Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u}$ tel que $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$

② Vérifier que $\pi_{x,u}$ divise π_u

③ En déduire que $\{\pi_{x,u} \ , \ x \in E \ et \ x \neq 0_E\}$ est fini

Solution :12

Soit x un vecteur non nul de E

① On montre facilement que $I_{x,u} = \{P \in \mathbb{K}[X] \ , \ P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ contenant π_u , donc il est engendré par un unique polynôme unitaire Q .Par définition du générateur unitaire d'un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ est clair que le polynôme Q est celui qu'on cherche

② On a déja dit à la question précédente que $\pi_u \in I_{x,u}$, donc $\pi_{x,u}$ divise π_u

③ D'après l'exercice précédent le polynôme π_u admet un nombre fini de diviseurs unitaire , donc l'ensemble $\{\pi_{x,u}, x \in E \ , \ x \neq 0_E\}$ est fini

Exercice :13

Soit E un espace de dimension finie non nulle n et u un endomorphisme cyclique de E c'est à dire il existe un vecteur non nul x_0 tel que $E = \mathcal{V}ect\left(u^k(x_0)\right)$

① Montrer que l'application

$$\varphi_{x_0,u} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to E \\ P \longmapsto P(u)(x_0) \end{cases}$$

est une application linéaire , surjective de noyau $\pi_u.\mathbb{K}[X]$

② Montrer que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E

③ En déduire que $\pi_u = (-1)^n\chi_u$

④ Donner la matrice de u dans cette base

Solution :13

1 1.1 La linéarité de $\varphi_{x,u}$ est clair

1.2 Soit $y \in E$, alors on a

$$y \in \mathcal{V}ect(u^k(x)) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N}^*, \exists(\alpha_0,\dots,\alpha_r) \in \mathbb{K}^r, y = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k u^k(x_0) = P(u)(x_0)$$

Avec $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ d'ou la surjectivité de $\varphi_{x,u}$

1.3 Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a

$$P \in \ker \varphi_{x,u} \Leftrightarrow P(u)(x_0) = 0$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(u)\left(u^k(x_0)\right) = P(u)ou^k(x_0) = u^k oP(u)(x_0) = u^k\left(P(u)(x_0)\right) = 0_E$$

L'endomorphisme $P(u)$ est nule sur une famille génératrice , ce qui entraine alors que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et par suite que $P \in \pi_u.\mathbb{K}[X]$,et donc $\ker \varphi_{x,u} \subset \mathbb{K}[X]$, l'autre inclusion est évidente , donc $\ker \varphi_{x,u} = \pi_u.\mathbb{K}[X]$

2 Soit $x \in E$, d'après la première question on a : $\exists P \in \mathbb{K}[X]$, $x = P(u)(x_0)$ d'après le théorème de Cayley -Hamilton on a $x = R(u)(x_0)$ tel que R est le reste de la divison euclidienne de P par χ_u et comme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors $x \in \mathcal{V}ect(x_0, u(x_0), \dots, u_{n-1}(x_0))$ et par suite $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E , donc c'est une base de E

3 On sait que $\deg \pi_u \leq n$. Supposons que $\deg \pi_u < n$ et posons $\pi_u = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, on a par définition de π_u , on a $\pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui entraine que $\pi_u(u)(x_0) = 0$, c'est à dire $a_0x_0 + a_1u(x_0) + \dots + a_ru^r(x_0) = 0_E$ et comme $(x_0, u)(x_0), \dots, u^r(x_0))$ est une sous famille de la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$, alors elle est libre donc $\forall k \in [\![0, r]\!]$, $a_k = 0$, donc $\pi_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui est absurde donc $r = n$ et comme π_u divise χ_u , alors $\pi_u = (-1)^n\chi_u$

① Si on pose $u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k.u^k(x_0)$, alors la matrice de u dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice :14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle .Montrer l'équivalence suivante : $\{0_E\}$ *et* E sont les seuls sous espaces stables par si, et seulement si χ_u est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$

Solution :14

① $(\Rightarrow)$.Supposons que $\{0_E\}$ *et* E sont les seuls sous espaces stables par u .Pour tout vecteur non nul z de E , le sous espace $E_u(z) = \mathcal{V}ect\left(u^k(z)\right)$ est un sous espace stable par u et comme il n'est pas nul , alors il est égale à E , et par suite l'endomorphisme u est cyclique et donc $\pi_{z,u} = \pi_u = (-1)^n\chi_u$.
Soit P un diviseur unitaire de χ_u différent de 1 et distincts de χ_u, ce qui entraine que $\chi_u = P.Q$ avec $\deg Q \in [\![1, n-1]\!]$.Soit x un vecteur non nul de E , posons $y = P(u)(x)$.Si $y \neq 0_E$, alors $\pi_{y,u} = \pi_u$ et on a $Q(u)(y) = (PQ)(u)(y) = \pi_{y,u}(u)(y) = 0$ et par suite π_u divise Q ce qui'est absurde , donc $P(u)(x) = 0_E$ et donc π_u divise P et par suite $P = \pi_u$ ce qui est absurde , donc P est soit 1 *soit* π_u et comme $\deg \pi_u \geq 1$, alors π_u est irréductible

② $(\Leftarrow)$ .Supposons que χ_u est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et soit F un sous espace non nul stable par u .Soit x un élément non nul de F , d'après l'exercice (7) le polynôme $\pi_{x,u}$ est un diviseur de π_u donc de χ_u et comme il est irréductible , alors $\pi_{x,u} = \chi_u$ ce qui entraine alors que $E = \mathcal{V}ect(u^k(x)) \subset F$ car F est stable par u ,d'ou le résultat

Exercice :15

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n

① Montrer que si A est inversible , alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

② Dans cette question on se propose de montrer dans le cas générale

$\chi_{AB} = \chi_{BA}$ par plusieurs méthodes

A).**Première méthode**

① Soit $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\chi_{J_rB} = \chi_{BJ_r}$

② En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

B).**Deuxième méthode**

Soit $x \in \mathbb{K}$, on pose pour t dans $\mathbb{K}$, $P(t) = \chi_{(A-t.I_n)B}(x) - \chi_{B(A-t.I_n)}(x)$

① Montrer que P est une fonction polynômiale en t

② Montrer que P s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{K}$

③ En déduire que $\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x) = 0$ et puis que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

C).**Troisième méthode**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

① Etablir que :

$$\begin{pmatrix} \lambda.I_n - BA & B \\ 0 & \lambda.I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ 0 & \lambda.I_n - AB \end{pmatrix}$$

② En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Exercice :15

D).**Quatrième méthode**

① Montrer que l'ensemble des matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

② En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Solution :15

① Si A est inversible , alors on a $AB = A(BA)A^{-1}$, donc AB et BA sont semblables donc elles ont même polynôme caracéristique

② A).**Première méthode**

① Soit $r \in \mathbb{N}^*$,on a

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ , posons } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

avec

$$B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \text{ , } B_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}) \text{ , } B_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K}) \text{ et } B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$$

On a

$$J_rB = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } BJ_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ * & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

ces dexu matrice sont des matrices triangulaires par blocs donc on a $\chi_{J_rB} = \chi_{BJ_r} = (-x)^{n-r}\chi_{B_1}$

② Posons $r = rg(A)$, alors il existe deux matrices inversible P et Q telle que $A = PJ_rQ$, donc :

$$\chi_{AB} = \chi_{P(J_rQB)} \underbrace{=}_{Question1} \chi_{J_r(QBP)} \underbrace{=}_{Question2} \chi_{Q(BPJ_r)} \underbrace{=}_{Question1} \chi_{B(PJ_rQ)} = \chi_{BA}$$

B).**Deuxième méthode**

Soit $(x,t) \in \mathbb{K}^2$.

① Si on pose $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$, alors le coefficient générique de $(A - t.I_n)B$ est $C_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{n}(a_{i,k} - t\delta_{i,k})b_{k,j}$ et par suite celui de $(A - t.I_n)B - xI_n$ est $d_{i,j}(t) = C_{i,j}(t) - x\delta_{i,j}$, par suite on a $\det((A - t.I_n)B - xI_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n} d_{k,\sigma(k)}(t)$ et comme $C_{i,j}$ sont des fonctions polynomiales en t de degré inferieure ou égale à 1 , alors $d_{i,j}$ aussi et par suite $\det((A - t.I_n)B - x.I_n)$ est une fonction polynômiale en t de degré inferieure ou égale à n .De même pour $\det(B(A - t.I_n) - x.I_n)$ est une fonction polynômiale en t de degré inférieure ou égale à n ce qui entraine que P est une fonction polynômiale en t de degré inférieure ou égale à n

② On a $\forall t \in \mathbb{K}$, $t \notin \mathcal{S}p(A)$, $A - t.I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et d'après la première question on a $P(t) = 0$ et comme $\mathcal{S}p(A)$ est fini et $\mathbb{K}$ est infini , alors P admet une infinité de point d'annulation et par suite $P = 0$ ce qui entraine que $P(0) = 0$, c'est à dire que $\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x) = 0$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{K}$, donc le polynôme $\chi_{AB} - \chi_{BA}$ admet une infinité de racines donc il est nul d'ou l'égalité : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

C).**Troisième méthode**

① On a $\begin{pmatrix} \lambda.I_n - BA & B \\ 0 & \lambda.I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda.I_n - BA) + BA & B \\ \lambda.A & \lambda.I_n \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ \lambda.A & \lambda.I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ 0 & \lambda.I_n - AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ \lambda.A & \lambda.I_n \end{pmatrix}$

② On a alors :

$$\det\begin{pmatrix} \lambda.I_n - BA & B \\ 0 & \lambda.I_n \end{pmatrix} . \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \lambda^n \det(\lambda.I_n - BA)$$

et

$$\det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} . \det\begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ 0 & \lambda.I_n - AB \end{pmatrix} = \lambda^n \det(\lambda.I_n - AB)$$

On a donc : $\forall\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\det(AB - \lambda.I_n) = \det(BA - \lambda.I_n)$ ce qui entraine que le polynôme $\det(AB - X.I_n) - \det(BA - X.I_n)$ admet une infinité de racine donc il est nul c'est à dire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

D)**Quatrième méthode**

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie donc toutes ses normes sont équivalentes , on est alors libre de choisir chaque fois la norme qui nous convient

① L'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui à chaque A associé son déterminant est continue et comme $\mathbb{K}^*$ est un ouvert de $\mathbb{K}$,alors son image réciproque par det est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à savoir $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Montrons maintenant la densité .Soit A une matrice carrée d'ordre n comme le spectre de A est fini , alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq n_0$, $\frac{1}{p} \notin \mathcal{S}p(A)$ si on pose alors pour $p \geq n_0$, $A_p = A - \frac{1}{p}.I_n$, alors la suite $(A_p)_{p\geq n_0}$ est une suite de matrices inversibles de limite la matrice A ce qui prouve la densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

② Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.Par densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une suite $(A)_p$ de matrices inversibles telle que $A_p \to A$ .D'après la première question on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_pB} = \chi_{BA_p}$
. Le produit matriciel est une application bilinéaire continue , alors les suites $(A_pB)_p$ *et* $(BA_p)_p$ convergent respectivement vers AB *et* BA
.L'application $M \longmapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme composée de deux applications continues à savoir det , c'est un résultat du cours et $M \longmapsto M - XI_n$ qu'est une application lipschitzienne. donc en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Exercice :16

Montrer qu'une matrice de permutation à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable

Solution :16

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutations , il est clair que $(\mathcal{P}_n,\times)$ est un groupe . L'application :

$$\Sigma : \begin{cases} \mathcal{S}_n \to \mathcal{P}_n \\ \sigma \longmapsto P_\sigma \end{cases}$$

Est un isomorphisme de groupe donc l'ensemble $\mathcal{P}_n$ est fini de cardinal $n!$ et donc d'après le théorème de Lagrange vue dans la fiche 1 on a $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $P_\sigma^{n!} = I_n$ ce qui entraine que le polynôme $X^{n!} - 1$ est un polynôme annulateur de P_σ et comme il est scindé et à racine simple dans $\mathbb{C}$, alors elle est diagonalisable

Exercice :17

Soient n un entier naturel non nul et A une matrice à coefficients réels dont le polynôme caractéristique est scindé .Montrer que

$$tr\left(A^2 + A + I_n\right) \geq \frac{3n}{4}$$

Solution :17

Le plolynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.Il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients réelles telles que $A = PTP^{-1}$.On a alors $A^2 + A + I_n = P(T^2 + T + I_n)P^{-1}$ et par suite si on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , alors on a

$$tr(A^2 + A + I_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k^2 + \lambda_k + 1\right)$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, ce qui entraine alors que $tr(A^2 + A + I_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4} = \frac{3n}{4}$

Exercice :18

Soit n un entier non nul et A une matrice carrée à coefficients réels telle que $A^3 = A + I_n$.Montrer que $\det A > 0$

Solution :18

La matrice A est inversible car elle annule le polynôme $P = X^3 - X - 1$ à coefficient constant non nul, donc son déterminant est non nul .Le polynôme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.Le polynôme P a trois racines complexe : une racine réelle α et une racine complexe non réelle β et son conjugué $\overline{\beta}$. Posons m_α L multiplicité de la valeur propre α ($m_\alpha = 0$ si α n'est pas valeur propre de A) et m_β la multiplicité de la valeur propre β ($m_\beta = 0$ si β , n'est pas valeur propre de A).

✎.Remarquons que $\alpha.\beta.\overline{\beta} = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3}$ avec $a_0(resp a_n$) est le coefficient constant (dominant) de P ce qui entraine alors que $\alpha.|\beta|^2 = 1 > 0$ ce qui prouve alors que $\alpha > 0$

✎.On a déterminant de A est alors égale $\alpha^{m_\alpha} |\beta|^{2.m_\beta} > 0$

Exercice :19

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de rang r.Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de u de degré $r + 1$

Solution :19

Le rang de u est égale à r , alors d'après le théorème du rang la dimension du $\ker u$ est égale à $n - r$, soit alors $B = (e_1, \ldots, e_{n-r}, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à $\ker u$.La matrice de u dans cette base est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & U \\ 0_r & V \end{pmatrix}$ par une récurrence facile on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & UV^{k-1} \\ 0_r & V^k \end{pmatrix}$ et par linéarité on a

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X] , \ MQ(M) = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & UQ(V) \\ 0_r & VQ(V) \end{pmatrix}$$

Si on pose $P = X\chi_V$, alors on a $P(M) = 0_n$ et comme $\deg P = 1 + \deg \chi_V = 1 + r$, alors le polynôme P convient

Exercice :20.Une preuve du théorème du Cayley Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

① On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(u^i(x_0))_{i \in \{0 \ldots n-1\}}$ est une base de E .On pose

$$u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$$

① Calculer χ_u en fonction des a_k .

② En déduire que $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

② Pour $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$, on pose

$$E_u(x) = \mathcal{V}ect\left\{u^k(x_0) , \ k \in \mathbb{N}\right\}$$

① Montrer que $E_u(x)$ admet une base de la forme $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$.

② En déduire que $\chi_u(u)(x) = 0$.

③ Retrouver le théorème de $\mathcal{C}ayley \ \mathcal{H}amilton$

Solution :20

① 1.1 La matrice de u relativement à la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

En éffécutant l'opération $L_1 \hookleftarrow L_1 + \sum_{k=2}^{n} X^{k-1} L_k$, et en developpant par rapport à la première ligne on a $\chi_u = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$

1.2 Pour montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, il suffit de montrer que $\chi_u(u)$ est nulle dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ .Soit alors $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\chi_u(u)\left(u^k(x_0)\right) = \left(\chi_u(u) \ o \ u^k\right)(x_0) = u^k\left(\chi_u(u)(x_0)\right) = u^k(0_E) = 0_E$, d'ou le résultat

2 2.1 Posons $A_u(x) = \left\{ k \in \mathbb{N} \ , \ (x, u(x), \dots, u^{k-1}(x_0)) \ \textit{est libre} \right\}$, on a $A_u(x)$ est non vide car il contient 1 et il est majoré par la dimension de $E_u(x)$, donc admet un plus grand élément noté p

On montre maintenant par récurrence que :

$$\forall k \geq p \ , \ u^k(x) \in \mathcal{V}ect\left(u^l(x) \ , \ l \in [\![1, p-1]\!]\right)$$

Pour $k = p$ c'est clair

Soit $k \geq p$, supposons que $u^k(x) \in \mathcal{V}ect\left(u^l(x) \ , \ l \in [\![1, p-1]\!]\right)$.On a :

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x) &= u\left(u^k(x)\right) \in u\left(\mathcal{V}ect\left(u^l(x) \ , \ l \in [\![1, p-1]\!]\right)\right) \\ &= \mathcal{V}ect\left(u(x), \dots, u^p(x)\right) \subset \mathcal{V}ect\left(u^l(x) \ , \ l \in [\![1, p-1]\!]\right) \end{aligned}$$

D'ou

$$\forall k \geq p \ , \ u^k(x) \in \mathcal{V}ect\left(u^l(x) \ , \ l \in [\![1, p-1]\!]\right)$$

, c'est à dire que $E_u(x) = \mathcal{V}ect\left(u^l(x) \ , \ l \in [\![1, p-1]\!]\right)$ ce qui est équivalent de dire que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une famille génératrice de $E_u(x)$ et comme la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre , alors c'est une base de $E_u(x)$

2.2 L'espace $E_u(x)$ est stable par u , si on note v l'endomorphisme , alors $E_u(x)$ admet une base de la forme $(x, v(x), \dots, v^{p-1}(x))$, donc $\chi_v(v)(x) = 0$ ce qui entraine alors que $\chi_u(u)(x) = 0$

3 Soit $x \in E$, si $x = 0$, alors $\chi_u(u)(x) = 0$ et si $x \neq 0_E$, alors d'après la question précédente on a $\chi_u(u)(x) = 0$, ce qui entraine alors que $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Exercice :21.Commutant d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ,on note par

$$\mathcal{C}(f) = \{ g \in \mathcal{L}(E) \ , \ fog = gof \}$$

① Montrer que : $\mathcal{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

② Montrer qu'un endomorphisme g est un élément de $\mathcal{C}(f)$ si et seulement si chaque sous espace propre de f est stable par g .

③ En déduire que $\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(f)} m_\lambda^2$ où m_λ est la multiplicité de la valeur propre de λ.

④ On suppose que que les valeurs propres de f sont simples .Montrer que $(id_e, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

Solution :21

① C'est clair

② . $(\Rightarrow)$ .C'est du cours

.$(\Leftarrow)$.Supposons que tous les sous espaces propres de f sont stables par g , comme f est diagonalisable , alors $(*)$: $E = \oplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f)$, donc pour montrer que g commute avec f il suffit de montrer que ceci à lieu sur tout sous espace propre de f .Soit $k \in [\![1, r]\!]$ et $x \in E_{\lambda_k}(f)$, on a $fog(x) = f\left(g(x)\right) = \lambda_k.g(x)$ car $g(x) \in E_{\lambda_k}(f)$ ceci d'une part d'autre part on a $gof(x) = g\left(f(x)\right) = g(\lambda_k.x) = \lambda_k.g(x)$ ce qui prouve l'égalité de $gof \ et \ fog$ sur chaque sous espace propre de f , et par suite l'égalité

③ Soit g un endomorphisme de E . D'après la question précédente g est un élément de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, la matrice de g dans une base de E adaptée à la décomposition $(*)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{E_{\lambda_1}(f)} & 0 \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_{E_{\lambda_2}(f)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A_{E_{\lambda_r}(f)} \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}_f \longrightarrow \prod_{k=1}^{r} \mathcal{M}_{\dim\left(E_{\lambda_k}(f)\right)}(\mathbb{K}) \\ g \longmapsto \left(A_{E_{\lambda_1}(f)}, \dots, A_{E_{\lambda_r}(f)}\right) \end{cases}$$

L'application φ est un isomorphisme d'espace vectoriel , donc les deux espaces ont même dimension et par suite $\dim \mathcal{C}_f = \sum_{k=1}^{r} \left(\dim\left(E_{\lambda_k}\right)\right)^2$

① Si on suppose que les valeurs propres de f sont simples ,alors $\forall k \in [\![1,r]\!]$, $\dim\left(E_{\lambda_k}\right) = 1$,ce qui entraine que $\dim \mathcal{C}_f = n$.Le degré du polynôme minimal de l'endomorphisme f est égale à n , car il admet n racines distinctes , ce qui entraine alors que $\dim \mathbb{K}[f] = n$ et qu'il admet la famille $(id_E, f, \ldots, f^{n-1})$ comme base (Voir le cours de l'arithmétique des entiers et des polynômes) .Or $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}_f$, alors on a égalité et par suite $(id_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$

Exercice :22.Diagonalisation simultanée

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie ,diagonalisables qui commutent.Montrer que f et g admettent une base de diagonalisation commune .

Solution :22

On a f est diagonalisable , alors si on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f ,alors on a $E = \oplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f)$, et comme f et g commutent , alors pour tout entier $k \in [\![1,r]\!]$, le sous espace $E_{\lambda_k}(f)$ est stable par g , notons alors g_k l'endomorphisme induit par g sur $E_{\lambda_k}(f)$, comme g est diagonalisable , alors pour $k \in [\![1,r]\!]$, l'endomorphisme g_k est diagonalisable donc il existe une base B_k de l'espace $E_{\lambda_k}(f)$ formée des vecteurs propres de g_k donc de g .Si on pose $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r$, alors B est une base de E formée à la fois des vecteurs propres de f et de g donc c'est une base de diagonalisation commune de f et g

Exercice :23

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n diagonalisables ayant même spectre et telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $tr(A^k) = tr(B^k)$.Montrer que A et B sont semblables

Solution :24

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A (etB) et $m_1, \ldots, m_p$ et $m'_1, \ldots, m'_p$ les ordres de multiplicités respectivement de A et de B , il s'agit de montrer que $\forall i [\![1,p]\!]$, $m_i = m'_i$ .L'égalité $tr(A^k) = tr(B^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ s'écrit $\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^k = \sum_{i=1}^{p} m'_i \lambda_i^k$ ce qui équivalent de dire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k (m_i - m'_i) = 0$, ce qui se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 - m'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_p - m'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres sont distinctes donc la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$ est inversible et par suite $\forall i [\![1,p]\!]$, $m'_i = m'_i$, donc les matrices A et B sont semblables à une même matrice diagonale ce qui entraine alors Aet B sont semblables

Exercice :25

Soit n un entier naturel non nul et A une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$, telle que

$$A^3 = A + 6I_n$$

Montrer que : $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\det A = 2^p 3^q$ $avec$ $p + 2q = n$

Solution :25

Le polynôme $P = X^3 - X - 6$ est un polynôme annulateur de A , il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$:

$$P = (X-2)(X+1+i\sqrt{2})(X+1-i\sqrt{2})$$

Il en résulte que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, car elle annule un polynôme scindé à racine simples dans $\mathbb{C}$ et que $\mathcal{S}p_{\mathbb{C}}(A) \subset \left\{2, -1+i\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2}\right\}$.Si $-1+i\sqrt{2}$ est une valeur propre de A de multiplicité q , alors $-1-i\sqrt{2}$ est aussi une valeur propre de multiplicité aussi égale à q ,si 2 est une valeur propre de A notons p sa multiplicité .Si $-1+i\sqrt{2}$ (resp 2) n'est pas une valeur propre de A , on convient de poser

$q = 0$(resp $p0$) :on a alors :

$$\det A = 2^p(-1+i\sqrt{2})^q(-1-i\sqrt{2})^q = 2^p\left(|-1+i\sqrt{2}|^2\right)^q = 2^p 3^q$$

Il est alors clair que $p + 2q = n$

Exercice :26

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficient réels et B la transposée de sa comatrice. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B

Solution :26

On a $AB = BA = \det A.I_n$

① Si $rg(A) = n$, alors A est inversible et $B = (\det A).A^{-1}$.Si λ est une valeur propre de A , alors elle est non nulle , soit X un vecteur propre de A associé à λ.On a $AX = \lambda.X$ ce qui entraine que $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$ et donc $BX = \frac{\det A}{\lambda}X$ ce qui prouve alors que X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\frac{\det A}{\lambda}$

② Si $rg(A) \leq n-2$, alors dans ce cas B est la matrice nulle et par suite tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de B en particulier ceux de A

③ Si $rg(A) = n-1$, alors dans ce cas le rang de B est 1 , voir la fiche révision sup , et par suite B admet 0 comme valeur propre d'ordre au moins égale à $n-1$ .Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 , si on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé canoniquement à A , alors son noyau est une droite vectoriel engendré par le vecteur ${}^tU = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.Comme $\det A = 0$ alors $AB = BA = 0_n$ ce qui entraine alors que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $AV_j = 0$ ou V_j désigne la $j$eme colonne de B ce qui entrâine alors que les ${}^tV_j$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeurs propre 0 ce qui entraine alors que

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \ , \ \exists \lambda_j \in \mathbb{K} \ , \ V_j = \lambda_j.{}^tU$$

Si on pose $Y = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $B = UY$ ce qui entraine que

$$BU = UYU = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i\right) U$$

Ce qui veut dire que U est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\alpha_k$
Dans le cas ou U est un vecteur propre associé à une valeur propre λ non nulle .On a alors $BAU = \lambda BU$ et comme λ est non nulle , alors $BU = 0$ et par suite U est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 0

Exercice :27.Une solution à l'aide de Maple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

① Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A

② Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A .

③ La matrice A est elle diagonalisable ?

④ Déterminer une matrice triangulaire T et une matrice inversible P telles que $P^{-1}.A.P = T$

Solution :27

Nous allons commencer par charger le bibliothèque linalg qui comporte de nombreuses instructions relatives aux matrices :
>with(linalg);
BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian
Commençons par définir la matrice A :
>A :=matrix(3,3,[6,-6,5,-4,-1,10,7,-6,4]);

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

① On obtient le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A à l'aide des instructions charpoly et minpoly :
$>P := charpoly(A, x);$
$P := x^3 - 9x^2 + 15x + 25$
$>Q : minpoly(A, x);$
$Q := x^3 - 9x^2 + 15x + 25.$
Attention l'instruction charpoly retourne le déterminant de la matrice $x.I_n - A$

② On obtient les valeurs propres de A à l'aide de la commande eigenvals
$>eigenvals(A)$; -1 , 5 , 5.
On peut aussi déterminer les valeurs propres de A en utilsant la commande solve
$> solve(P)$; c'est à dire on résoud l'équation $P(x) = 0$
Les sous espaces propres sont obtenus à l'aide de la commande eigenvects
$> eigenvects(A)$; $[5, 2, [1, 1, 1]], [1, 1, [\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, 1]]$
On remarque alors que la dimension du sous espace propres associé à la valeurs propres 5 est de dimension 1 , donc la matrice A n'est diagonalisable mais elle est trigonalisable comme le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$

③ On utilise la commande jordan pour déterminer une matrice triangulaire supérieure qui est semblable à A
$>T := jordan(A, 'P'); \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et avec la commande $evalm(P)$ on obtient la matrice P de passage
$>P := evalm(P); \quad P = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 11 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} & 11 & -\frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & 11 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$
On peut vérifier le résultat à l'aide de la commande evalm
$>evalm(P * T * inverse(P))$; on retrouve bien la matrice A